

Schémas d'intégration aux différences finies

- Considère l'équation aux dérivées partielles associée à un problème d'advection avec diffusion

$$\frac{\partial F}{\partial t} + U \frac{\partial F}{\partial x} = \alpha \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

On considère ici que U et α sont des constantes représentant respectivement la vitesse de propagation (U) et le coefficient de diffusion.

- Solution est de la forme

$$F(x, t) = \sum_{n=-N}^{+N} \tilde{f}_n(t) e^{in(2\pi/L)x} = \sum_{n=-N}^{+N} \tilde{f}_n(0) e^{-\alpha n^2 (2\pi/L)^2 t} e^{in(2\pi/L)(x-Ut)}$$

- Chaque composante est propagée à une vitesse constante U qui est indépendante du nombre d'onde $k = 2\pi/\lambda = n(2\pi/L)$

Discrétisation en différences finies

- Notation: exemple pour le schéma aux différences centrées

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x}(x_l, t_n) &= \frac{F(x_l + \Delta x, t_n) - F(x_l - \Delta x, t_n)}{2\Delta x} \equiv \frac{F_{l+1}^n - F_{l-1}^n}{2\Delta x} \\ &\equiv \frac{\delta F_l^n}{\delta x} \equiv \overline{F}_x^x \end{aligned}$$

- Substitution des dérivées partielles par leur forme discrétisée

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{F_l^{n+1} - F_l^{n-1}}{2\Delta t}, \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{F_{l+1}^n - 2F_l^n + F_{l-1}^n}{(\Delta x)^2}$$

Fonction de réponse associé à un opérateur de différentiation spatiale (e.g., dF/dx)

* Application à la fonction $\sin(n(2\pi/L)x) = \sin((2\pi/\lambda)x)$ où $\lambda = L/n$.

* Fonction de réponse

→ rapport entre la valeur discrétisée et la valeur analytique

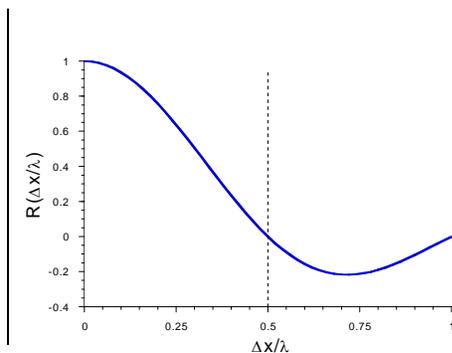
- Application à la fonction $\sin(n(2\pi/L)x) = \sin((2\pi/\lambda)x)$ où $\lambda = L/n$.

$$R = \frac{(\delta F / \delta x)}{\partial F / \partial x} = \frac{\sin((2\pi/\lambda)(x_k + \Delta x)) - \sin((2\pi/\lambda)(x_k - \Delta x))}{2\Delta x(2\pi/\lambda)\cos((2\pi/\lambda)x_k)} = \frac{\sin((2\pi/\lambda)\Delta x)}{(2\pi/\lambda)\Delta x}$$

Schéma discrétisé est exact si $R \rightarrow 1$ lorsque $\Delta x \rightarrow 0$

Si $\Delta x/\lambda \ll 1$:

$$R \approx 1 - \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \frac{\Delta x^2}{6}$$



• **Forme discrétisée de l'équation: schéma saute-mouton**

$$\frac{F_l^{n+1} - F_l^{n-1}}{2\Delta t} = -U \frac{F_{l+1}^n - F_{l-1}^n}{2\Delta x} +$$

$$F_l^{n+1} = F_l^{n-1} - \frac{U\Delta t}{\Delta x} (F_{l+1}^n - F_{l-1}^n)$$

• **Considère le cas sans dissipation ($\alpha = 0$)**

• **Impact sur une solution de la forme $\exp(ikx - i\omega t)$**

* Solution générale est une superposition de solutions de cette forme où $k = 2\pi/\lambda$

Analyse de von Neumann pour le problème d'advection ($\alpha = 0$)

• **Schéma saute-mouton:** $F_l^{n+1} = F_l^{n-1} - C(F_{l+1}^n - F_{l-1}^n)$ (1)
 où $C = U\Delta t/\Delta x$ est le **nombre de Courant**

• **Solution de la forme:** $\exp(ikx - i\omega t)$

$$E_l^n = e^{i(kx_l - \omega t_n)} = \exp\{ik(l\Delta x) - i\omega(n\Delta t)\}$$

• **Introduit ceci dans l'équation (1):**

$$E_l^n (e^{-i\omega\Delta t} - e^{+i\omega\Delta t}) = -CE_l^n (e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})$$

$$(e^{-i\omega\Delta t} - e^{+i\omega\Delta t}) = -C(e^{ik\Delta x} - e^{-ik\Delta x})$$

$$-2i \sin \omega\Delta t = -2i \frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x$$

$$\sin \omega\Delta t = \frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x$$

Solution de cette forme est possible uniquement si $U\Delta t/\Delta x \leq 1$

Rapport entre la vitesse de phase numérique 'c' et la vitesse de phase exacte U en fonction de $k\Delta x$

Vitesse de phase:
 $\omega = kc$

La vitesse de phase numérique est toujours *inférieure* à la vitesse de phase réelle

k Dx	Rapport c/U
0.0	1.00
0.5	0.98
1.0	0.92
1.5	0.78
2.0	0.58
2.5	0.32
3.0	0.14
3.14 (pi)	0.00

Analyse de stabilité pour le problème d'advection ($\alpha = 0$)

Pose $\rho = e^{i\omega t}$ dans

$$(e^{j\omega\Delta t} - e^{-i\omega\Delta t}) = -C(e^{jk\Delta x} - e^{-ik\Delta x})$$

et on obtient: $\rho^2 + 2iC(\sin k\Delta x)\rho - 1 = 0$

Solution: $\rho_{\pm} = -iC \sin k\Delta x \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2(k\Delta x)}$

• **Deux cas à considérer:**

- * $C^2 \sin^2(k\Delta x) > 1$:
- * $C^2 \sin^2(k\Delta x) \leq 1$:

- Solution est stable si $|\rho| \leq 1$
- Deux cas à considérer:
 - * $C^2 \sin^2(k\Delta x) > 1$:

$$\rho_{\pm} = -iC \sin k\Delta x \pm i\sqrt{C^2 \sin^2 k\Delta x - 1}$$

$$|\rho_{\pm}|^2 = \left(C^2 \sin^2 k\Delta x + C^2 \sin^2 k\Delta x - 1 \pm 2C \sin k\Delta x \sqrt{C^2 \sin^2 k\Delta x - 1} \right)$$

$$\geq 1 \pm 2C \sin k\Delta x \sqrt{C^2 \sin^2 k\Delta x - 1}$$

$$|\rho_{+}| > 1$$
 → Solution est donc instable dans ce cas
 - * $C^2 \sin^2(k\Delta x) \leq 1$:

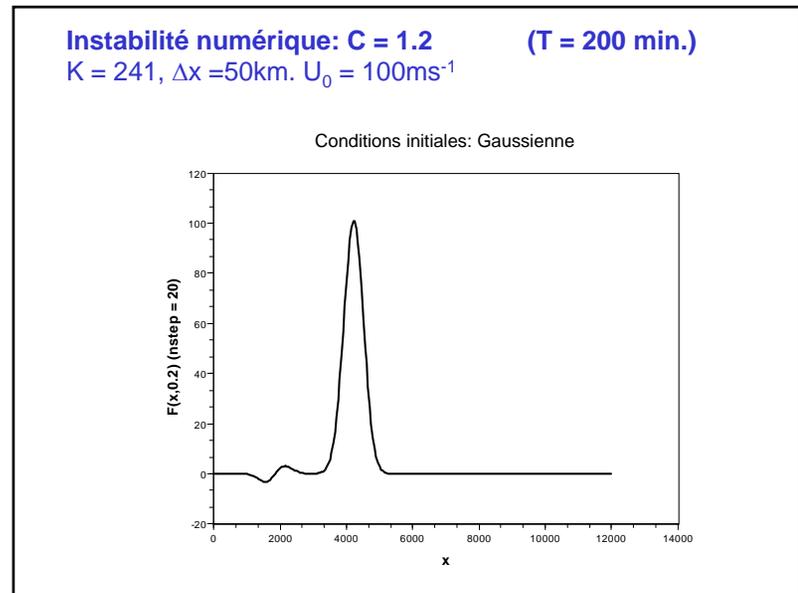
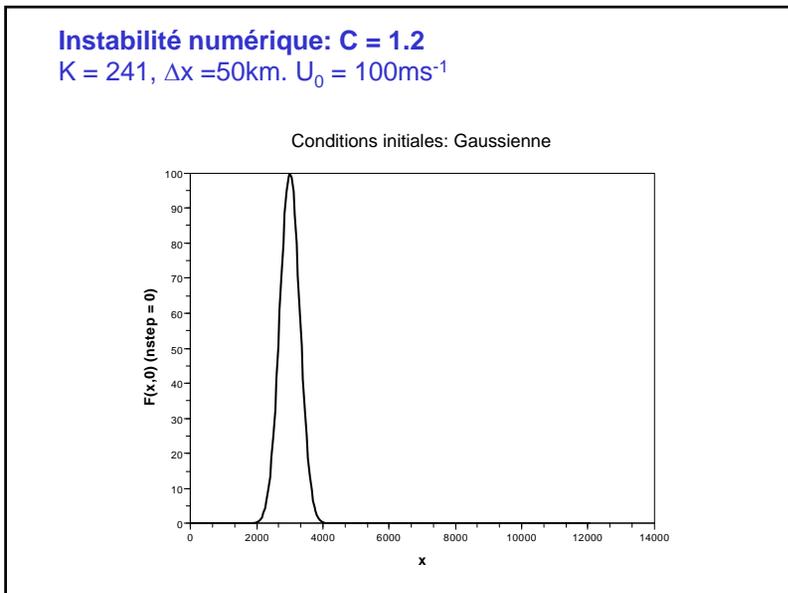
$$\rho_{\pm} = -iC \sin k\Delta x \pm \sqrt{1 - C^2 \sin^2 k\Delta x}$$

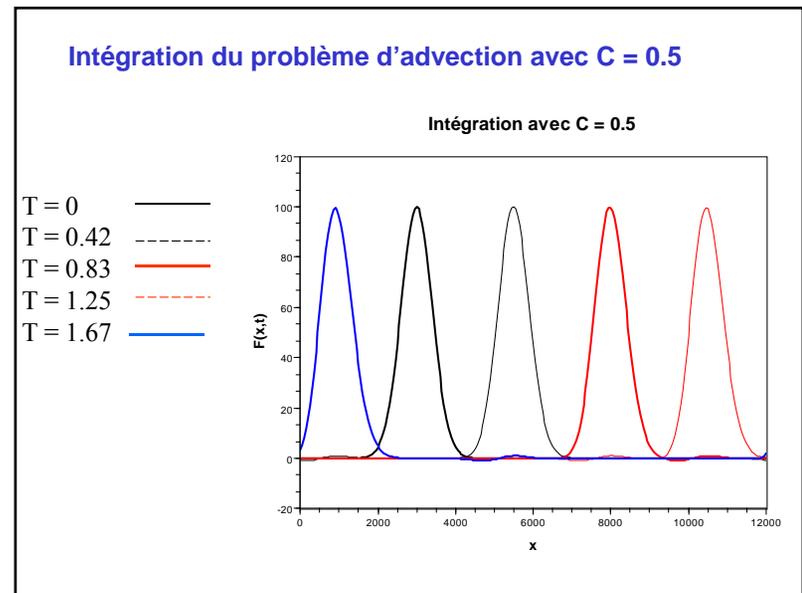
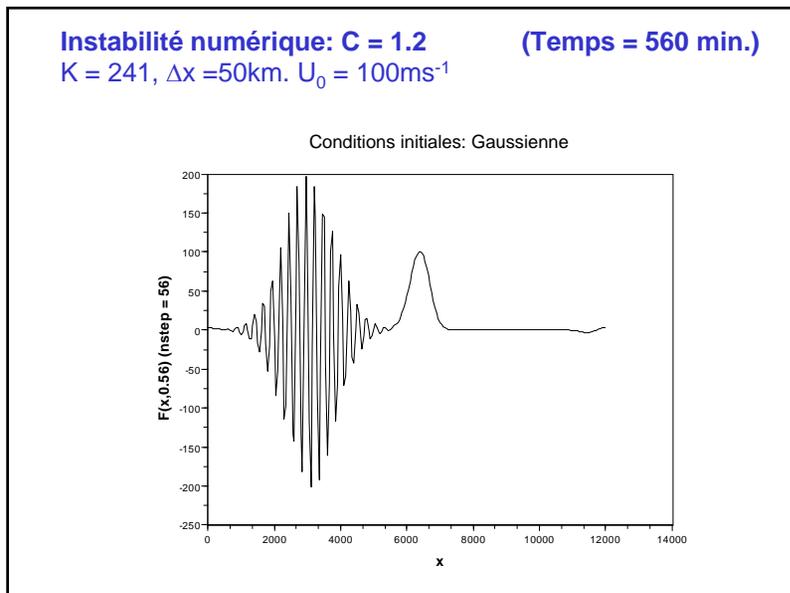
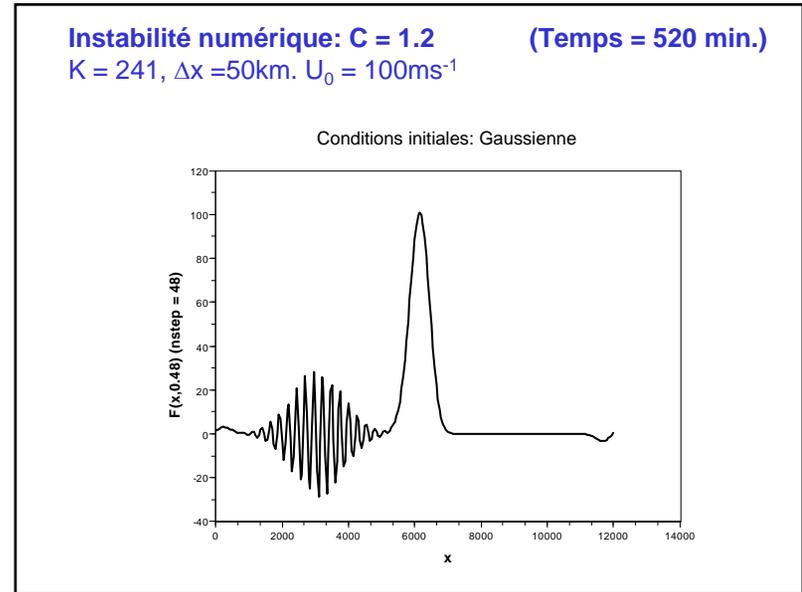
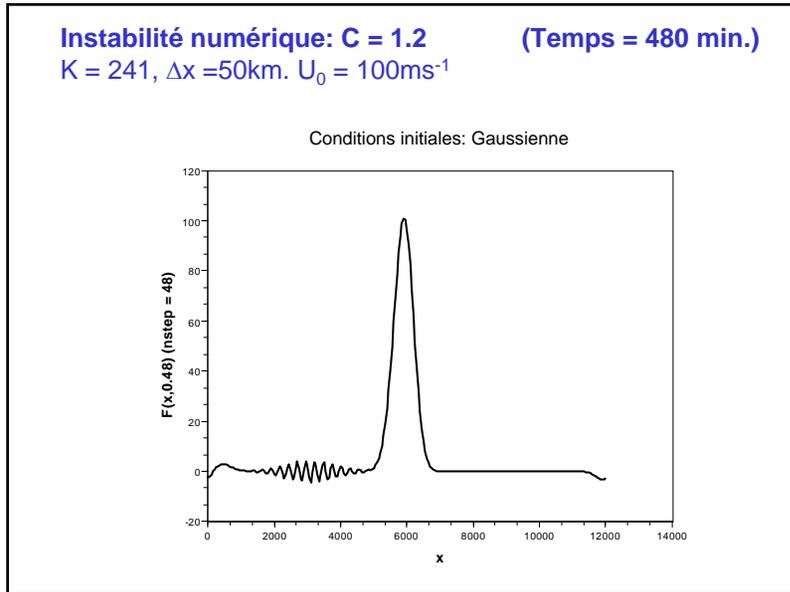
$$|\rho_{\pm}|^2 = C^2 \sin^2 k\Delta x + (1 - C^2 \sin^2 k\Delta x) = 1$$
 → Solution est stable
- Condition de Courant-Friedrichs-Lewy (CFL):
 - * Solution obtenue avec le schéma *leap-frog* est stable si et seulement si

$$C = U\Delta t/\Delta x \leq 1$$

Exemple d'instabilité numérique

- Exemple présenté dans les notes:
 - $x_l = l\Delta x$ et $l = 1, \dots, 241$
- Conditions initiales: $F(x_l, 0) = \exp(-(l - l_0)^2 \Delta x^2 / L_c^2)$
 - * $L_c/\Delta x = 8$. Si $L_c = 400$ km, on déduit donc que $\Delta x = 50$ km.
 - * Domaine: $L = 241 \Delta x = 12,050$ km
- Distance parcourue en 50 pas de temps ~ 3000 km
- $U \Delta t = 60$ km.
- Si $U = 100 \text{ ms}^{-1}$, alors $\Delta t = 600$ s ou 10 min.
- Critère CFL dans ce cas: $U\Delta t/\Delta x = 60/50 = 1.2 > 1$





Forme matricielle d'un schéma point-de-grille

- Schéma numérique peut être représenté sous une forme matricielle
 - * Schéma définit L équations à résoudre en chaque point de grille

$$F_l^{n+1} = F_l^{n-1} - C(F_{l+1}^n - F_{l-1}^n)$$

- Dans le cas, 1D

$$\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{L-1} \\ F_L \end{bmatrix}^{n+1} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{L-1} \\ F_L \end{bmatrix}^{n-1} - C \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{L-1} \\ F_L \end{bmatrix}^n$$

en supposant que la solution soit périodique.
Premier pas de temps est effectué avec un pas de temps avant:

$$F_l^{n+1} = F_l^n - C(F_{l+1}^n - F_{l-1}^n)$$

Relation de dispersion et vitesse de groupe

- En introduisant la solution $\exp(ikx - i\omega t)$ dans le schéma leap-frog, on obtient que:

$$\sin \omega \Delta t = -\frac{U \Delta t}{\Delta x} \sin k \Delta x$$

- Dans la limite où $\omega \Delta t$ et $k \Delta x$ sont petits, on peut développer en série de Taylor pour obtenir que:

$$\omega \Delta t - \frac{\omega^3 \Delta t^3}{6} = \frac{U \Delta t}{\Delta x} \left(k \Delta x - \frac{k^3 \Delta x^3}{6} \right) = k U \Delta t \left(1 - \frac{k^2 \Delta x^2}{6} \right)$$

- Approximation pour ω : $\omega \cong U k \left(1 - \frac{k^2 \Delta x^2}{6} \left[1 - \frac{U^2 \Delta t^2}{\Delta x^2} \right] \right)$
 - * Vitesse de phase est toujours inférieure à la vitesse de phase réelle
 - * Sous-estimation augmente au fur et à mesure que la longueur d'onde décroît.

- Vitesse de Groupe:

* Solution de la forme: $F(x,t) = A(x,t) \exp(ikx + i\omega t)$

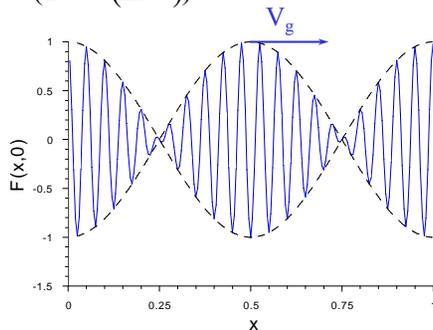
- * Vitesse de propagation de $A(x,t)$.

Vitesse de groupe

- Considère une solution formée de deux ondes ayant des nombres d'onde $(k_0 + \Delta k)$ et $(k_0 - \Delta k)$:

$$F(x,0) = A_0 e^{i(k_0 + \Delta k)x} + A_0 e^{i(k_0 - \Delta k)x} = A_0 e^{ik_0 x} (2 \cos(\Delta k x))$$

- Vitesse de groupe est la vitesse de déplacement de l'enveloppe



Vitesse de groupe numérique

- Considérons maintenant une solution de la forme

$$F(x_l, t_n) = A(x_l, t_n) \exp(i(kx_l - \omega t_n))$$

- Dans ce cas:

$$\frac{F_l^{n+1} - F_l^{n-1}}{2\Delta t} = \frac{1}{2\Delta t} \left[A(x_l, t_n + \Delta t) e^{ikx_l} e^{-i\omega(t_n + \Delta t)} - A(x_l, t_n - \Delta t) e^{ikx_l} e^{-i\omega(t_n - \Delta t)} \right] = \frac{e^{i(kx_l - \omega t_n)}}{2\Delta t} (A(x_l, t_n + \Delta t) e^{-i\omega \Delta t} - A(x_l, t_n - \Delta t) e^{+i\omega \Delta t})$$

- Développement en série de Taylor de $A(x_n, t_n \pm \Delta t)$:

$$A(x_l, t_n \pm \Delta t) = A(x_l, t_n) \pm \Delta t \frac{\partial A}{\partial t}$$

et on obtient

$$F_l^{n+1} - F_l^{n-1} = e^{i(kx_l - \omega t_n)} \left(-2iA(x_l, t_n) \sin \omega \Delta t + 2\Delta t \frac{\partial A}{\partial t} \cos \omega \Delta t \right)$$

De la même façon, on montre que

$$F_{l+1}^n - F_{l-1}^n = e^{i(kx_l - \omega t_n)} \left(2iA(x_l, t_n) \sin k \Delta x + 2\Delta x \frac{\partial A}{\partial x} \cos k \Delta x \right)$$

- Schéma *leap-frog*

$$F_i^{n+1} - F_i^{n-1} = -\frac{U\Delta t}{\Delta x} (F_{i+1}^n - F_{i-1}^n)$$

implique alors que:

$$2iA(x_j, x_n) \left[\sin \omega \Delta t + \frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x \right] + \frac{\partial A}{\partial t} [2\Delta t \cos \omega \Delta t] + \frac{U\Delta t}{\Delta x} \frac{\partial A}{\partial x} [2\Delta x \cos k\Delta x] = 0$$

- Premier terme s'annule car ω satisfait la relation de dispersion numérique

$$\sin \omega \Delta t = -\frac{U\Delta t}{\Delta x} \sin k\Delta x$$

- Equation d'évolution pour l'enveloppe est donc

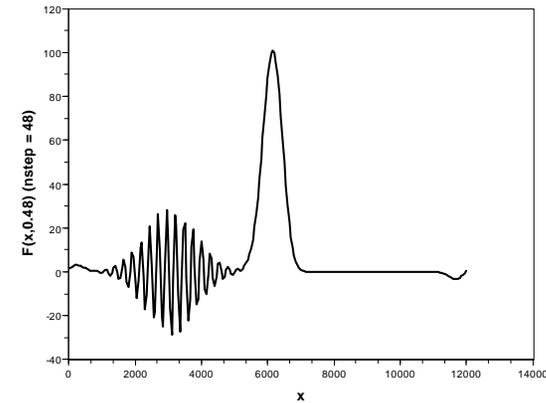
$$\frac{\partial A}{\partial t} + U \left(\frac{\cos k\Delta x}{\cos \omega \Delta t} \right) \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

- Vitesse de groupe numérique est différente de la vitesse de groupe de l'équation ($V_g = U$)

Instabilité numérique: C = 1.2 (Temps = 520 min.)

Onde la plus instable: $\lambda = 4\Delta x \Rightarrow V_g = 0$

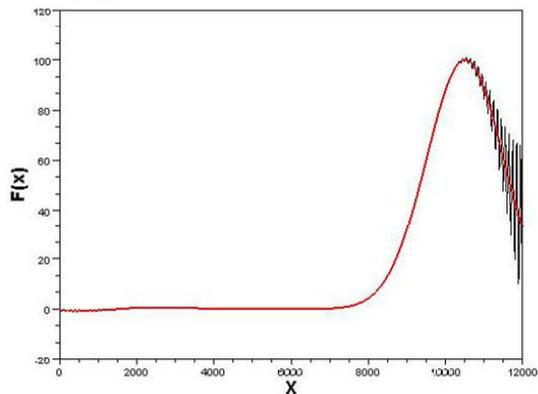
Conditions initiales: Gaussienne



Propagation d'ondes avec conditions aux frontières fixes

$$\lambda = 2\Delta x \Rightarrow V_g = -U$$

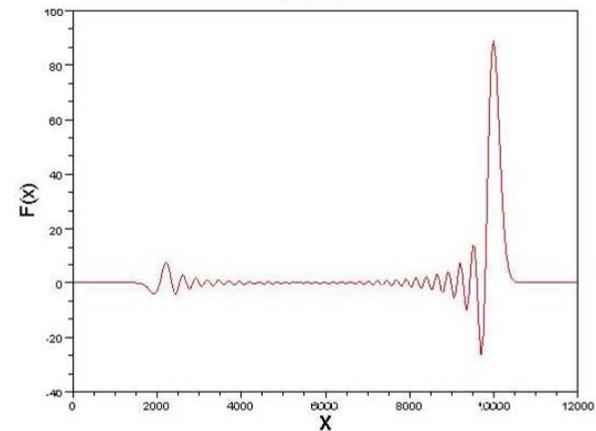
Propagation avec conditions aux frontières fixes



Création d'une onde de sillage

$$\lambda = 2\Delta x \Rightarrow V_g = -U$$

Onde de trainée



Conclusion

- Etude du schéma *saute-mouton* (*leap-frog*) appliqué à l'équation d'advection 1D dont les dérivées partielles par rapport à x sont approximées par un schéma aux différences finies

- * Discrétisation implique que la vitesse de phase est *inférieure* à la vitesse de phase réelle

- * Schéma est conditionnellement stable et la condition de stabilité est le critère de Courant-Friedrichs-Levy (CFL)

- $C^2 \sin^2(k\Delta x) \leq 1 \Rightarrow |C| \leq 1$ pour que toutes les ondes soient numériquement stables

- $C = U\Delta t/\Delta x$ est le *nombre de Courant*

- * Schéma numérique rend *dispersive* une onde qui, analytiquement, ne l'est pas.

- Vitesse de propagation de l'enveloppe dépend du nombre d'ondes

$$\frac{\partial A}{\partial t} + U \left(\frac{\cos k\Delta x}{\cos \omega \Delta t} \right) \frac{\partial A}{\partial x} = 0$$

- Présence de conditions aux frontières nécessite d'apporter des modifications au schéma en traitant de façon particulière les extrémités